

## 第 30 回シュプリンガー数学コンテスト講評と解答

審査委員長 秋山 仁

問題 1.  $n$  を 3 以上の整数とする.  $T$  を半径 1 の円に内接する正  $n$  角形  $P_1P_2\cdots P_n$  とする.  $T$  のすべての辺と対角線 (合計  $n(n-1)/2$  本) のそれぞれに対し, その長さの平方の和が  $n^2$  であること, すなわち,

$$P_1P_2^2 + P_1P_3^2 + \cdots + P_1P_n^2 + P_2P_3^2 + P_2P_4^2 + \cdots + P_2P_n^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 = n^2$$

であることを示せ.

寄せられた答案の多くが, 三角比・三角関数を用いるか, 複素数平面を用いていました. それぞれの解法に応じた工夫や洞察が見られ, 健闘ぶりが伝わってきました. ベクトルを用いた答案が少なかつたのは少々意外でした.

答案を作成するに当たっては, 頭の中のイメージを文章や式にするのに意外と苦労したようです. 頭の中ではわかっているようだけど書き誤った (と思われる), または書き方が適切でない箇所がみられる答案もありましたが, それらに目をつむれば, ほぼ全員が正解でした.

一着正解賞 (敬称略, 五十音順)

岡野篤志 (城北埼玉高等学校卒)  
南海舟 (西大和学園高等学校)  
茂木貴宏 (早稲田大学)

最優秀者を絞るのは困難でしたが, 検討の結果, 複素数平面を用いた答案とそれ以外の答案から, それぞれ, 茂木貴宏さんと高橋宏待さんを最優秀者としました.

最優秀者 (敬称略, 五十音順)

高橋宏待 (早稲田大学本庄高等学院)  
茂木貴宏 (早稲田大学)

今回は, 解説の中でいろいろな解法に触れることにして, 「証明例」としてそれらをまとめ直すことは省略します.

## 解説

題意の和を  $S$  とします. すなわち,

$$S = P_1P_2^2 + P_1P_3^2 + \cdots + P_1P_n^2 + P_2P_3^2 + P_2P_4^2 + \cdots + P_2P_n^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 \quad (1)$$

とします. まずは, 寄せられた答案を踏まえ, 本問に対する方針のいくつかをおおまかに紹介します.

$P_jP_k^2$  ( $1 \leq j < k \leq n$ ) を表す方法として多く見られたものは, 外接円の中心を  $O$  とし, 余弦定理を用いて

$$P_jP_k^2 = OP_j^2 + OP_k^2 - 2OP_j \cdot OP_k \cos \frac{2\pi(k-j)}{n} = 2 \left\{ 1 - \cos \frac{2\pi(k-j)}{n} \right\} \quad (2)$$

とするものでした。この後、

$$\sum_{m=0}^{n-1} \cos \frac{2\pi m}{n} = 0 \quad (3)$$

(またはこれに類する等式)を示し、 $S = n^2$ を導く、という流れです。(2)や(3)について、複素数平面を用いた証明も多く見られました。それらについても、以下の解説の中で触れます。

また、 $P_j P_k^2$ を表すのに、ベクトルの内積を用いて表す方針もあります。 $\overrightarrow{OP_m} = \vec{p}_m$  ( $1 \leq m \leq n$ )とおく(図1)と、

$$P_j P_k^2 = |\vec{p}_k - \vec{p}_j|^2 = |\vec{p}_k|^2 - 2\vec{p}_k \cdot \vec{p}_j + |\vec{p}_j|^2 = 2(1 - \vec{p}_k \cdot \vec{p}_j) \quad (4)$$

です。この方針が進めた場合、(3)と同様の役割を果たす式は

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \vec{0} \quad (5)$$

です。これは、直感的にも「さもあらなん」と思える式です。実際、 $n$ が偶数の場合については、対称性、すなわち、 $\vec{p}_{\frac{n}{2}+k} = -\vec{p}_k$ (図1)から(5)は直ちに導かれます。

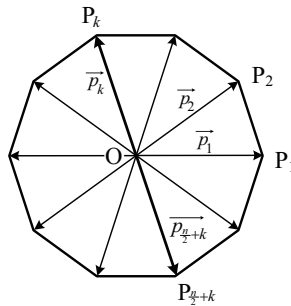


図1.

なお、外接円の中心  $O$  を原点にとり、 $P_m \left( \cos \frac{2\pi(m-1)}{n}, \sin \frac{2\pi(m-1)}{n} \right)$  とすると、(3)は、

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n \text{ の } x \text{ 成分が } 0 \text{ である}$$

という事実に他なりません。

また、 $n$ が偶数の場合に、三平方の定理だけで  $S = n^2$ を示している答案もありました。これについても、後ほど紹介します。

以下、寄せられた答案での考え方を交えながら、上記についてもう少し詳しく見ていきます。答案の考え方を引用するにあたっては、解説の流れ等を考慮して、内容を多少変えているところがあります。

### Sの捉え方

(1)の右辺について、「同じ長さの線分ごとにまとめる」という考え方に立ち、

$$S = \begin{cases} nP_1P_2^2 + nP_1P_3^2 + \cdots + nP_1P_{\frac{n+1}{2}}^2 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ nP_1P_2^2 + nP_1P_3^2 + \cdots + nP_1P_{\frac{n}{2}}^2 + \frac{n}{2}P_1P_{\frac{n}{2}+1}^2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

と変形するのは1つの考え方ですが、ここでは次の考え方を uses。

$1 \leq j \leq n$  をみだす整数  $j$  に対して,  $P_j$  を端点とする辺および対角線の長さの平方の和を  $S_j$  と表します. 例えば,

$$S_1 = P_1P_2^2 + P_1P_3^2 + \cdots + P_1P_n^2$$

です. すると,  $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$  であり, 各  $P_jP_k^2$  ( $1 \leq j < k \leq n$ ) は  $S_j$  と  $S_k$  の両方に含まれるので,

$$S = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{2} = \frac{nS_1}{2} \quad (6)$$

が成り立ちます (寄せられた答案の約 6 割が同様の考え方をういていました). (6) と示すべき式  $S = n^2$  を見比べて,

$$S_1 = 2n \quad (7)$$

を示せばよいことがわかります.

なお,  $P_1P_1 = 0$  より,  $S_1$  は

$$S_1 = P_1P_1^2 + P_1P_2^2 + P_1P_3^2 + \cdots + P_1P_n^2 \quad (8)$$

とも表せます. 以下では, この式を用います (これも, 答案に少なからず見られた考え方です).

### ベクトルの利用

最初に, ベクトルを用いる方針で  $S = n^2$  を示します. (4) で,  $j = 1$  とおくと, ( $k = 1$  の場合も含め)

$$P_1P_k^2 = 2(1 - \vec{p}_k \cdot \vec{p}_1) \quad (9)$$

となります. これと (8) より,

$$S_1 = \sum_{k=1}^n 2(1 - \vec{p}_k \cdot \vec{p}_1) = 2n - 2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n) \cdot \vec{p}_1 \quad (10)$$

です. したがって, 前述の (5), すなわち,  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \vec{0}$  が示されれば, (7) が示されます. 既に述べたように,  $n$  が偶数の場合には, (5) は  $O$  に関する  $T$  の点対称性から直ちに得られます.

そこで,  $n$  が奇数の場合を考え,  $\vec{OQ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n$  とします. 今度は, 線対称性を利用します. まず,  $P_2, P_3, \dots, P_{\frac{n+1}{2}}$  は, それぞれ,  $P_n, P_{n-1}, \dots, P_{\frac{n+3}{2}}$  と直線  $OP_1$  に関して対称 (図 2) だから,  $Q$  は直線  $OP_1$  上の点です.

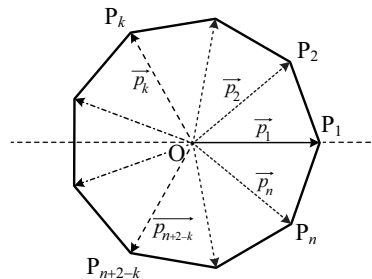


図 2.

同様に,  $P_3, P_4, P_5, \dots, P_{\frac{n+3}{2}}$  は, それぞれ,  $P_1, P_n, P_{n-1}, \dots, P_{\frac{n+5}{2}}$  と直線  $OP_2$  に関して対称だから,  $Q$  は直線  $OP_2$  上の点でもあります. したがって,  $Q$  は直線  $OP_1$  と直線  $OP_2$  の交点  $O$  です. すなわち,  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \vec{0}$  であり, (5) が示せました.

三角比・三角関数の利用

(2) で  $j = 1$  とすると

$$P_1P_k^2 = OP_1^2 + OP_k^2 - 2OP_1 \cdot OP_k \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} = 2 \left\{ 1 - \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} \right\} \quad (11)$$

となりますが、最初に、これについて補足します。

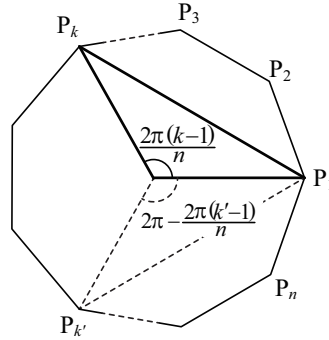


図 3.

$2 \leq k < \frac{n}{2} + 1$  をみたす整数  $k$  に対しては、 $\triangle OP_1P_k$ (図 3) に余弦定理を適用することで、(11) は直ちに得られます。  $\frac{n}{2} + 1 < k \leq n$  をみたす整数  $k$  に対しては、 $\triangle OP_1P_k$  において  $\angle OP_1P_k = 2\pi - \frac{2\pi(k-1)}{n}$  となりますが、 $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$  だから、やはり (11) が成り立ちます。さらに、 $k = 1$ 、および、 $n$  が偶数のときの  $k = \frac{n}{2} + 1$  ( $P_1P_{\frac{n}{2}+1}$  は直径) に対しても (11) は成り立ちますから、(11) は、 $1 \leq k \leq n$  をみたすすべての整数  $k$  に対して成り立ちます。

(11) より、(8) の  $S_1$  は、

$$S_1 = \sum_{k=1}^n 2 \left\{ 1 - \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} \right\} = 2n - 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} \quad (12)$$

と表せます。これより、(7) を示すためには  $\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} = 0$ 、すなわち、前述の (3) を示せばよいことがわかりました。

既に述べたように、(12) は、(5) または後述する複素数平面を用いるなど、何通りかの方法で示すことができます。ここでは「積を和に直す公式」(積和公式; 補注 1) と数列の和に対する技巧を用いた答案を紹介します。高橋宏侍さん(早稲田大学本庄高等学院)と岡野篤志さん(城北埼玉高等学校卒)がこの方法(または同様の方法)を用いていました。彼らがとった方法は、 $\cos \frac{2\pi(k-1)}{n} = f(k) - f(k-2)$  の形をつくるというものです。具体的には、「積和公式」を用いて

$$\cos \frac{2\pi(k-1)}{n} \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{2\pi k}{n} - \sin \frac{2\pi(k-2)}{n} \right\}$$

と変形します。これより

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \sin \frac{2\pi k}{n} - \sin \frac{2\pi(k-2)}{n} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{2\pi n}{n} + \sin \frac{2\pi(n-1)}{n} - \sin \frac{2\pi \cdot 0}{n} - \sin \frac{2\pi \cdot (-1)}{n} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( 0 - \sin \frac{2\pi}{n} - 0 + \sin \frac{2\pi}{n} \right) = 0 \end{aligned}$$

であり、これと  $\sin \frac{2\pi}{n} \neq 0$  より  $\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} = 0$ 、ともっていく流れです。

### 複素数平面の利用

正多角形  $T$  を複素数平面上で論じている答案も多く見られました。ここでは、複素数平面についての基本的な知識を前提として、答案の典型的な方針を説明します。以下において、 $i$  は虚数単位とします。

$T$  として、複素数平面上の単位円  $|z| = 1$  に内接する正  $n$  角形で、頂点  $P_k (k = 1, 2, \dots, n)$  が

$$\cos \frac{2\pi(k-1)}{n} + i \sin \frac{2\pi(k-1)}{n} = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^{k-1}$$

で与えられるものを考えます。  $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} (= e^{\frac{2\pi}{n}i})$  とおくと、  $P_k(\alpha^{k-1})$  です。

このとき、  $P_1 P_k^2 = \left( \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} - 1 \right)^2 + \sin^2 \frac{2\pi(k-1)}{n} = 2 - 2 \cos \frac{2\pi(k-1)}{n}$  だから、

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \left\{ 2 - 2 \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} \right\} = 2n - 2 \sum_{m=0}^{n-1} \cos \frac{2\pi m}{n} \quad (13)$$

です。また、  $\alpha \neq 1$  より

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \quad (14)$$

ですが、この左辺は

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^m = \sum_{m=0}^{n-1} \left( \cos \frac{2\pi m}{n} + i \sin \frac{2\pi m}{n} \right) = \sum_{m=0}^{n-1} \cos \frac{2\pi m}{n} + i \sum_{m=0}^{n-1} \sin \frac{2\pi m}{n},$$

右辺の分子は

$$\left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n - 1 = \cos \frac{2\pi n}{n} + i \sin \frac{2\pi n}{n} - 1 = (\cos 2\pi - 1) + i \sin 2\pi = 0$$

です。したがって、

$$\sum_{m=0}^{n-1} \cos \frac{2\pi m}{n} + i \sum_{m=0}^{n-1} \sin \frac{2\pi m}{n} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \sum_{m=0}^{n-1} \cos \frac{2\pi m}{n} = \sum_{m=0}^{n-1} \sin \frac{2\pi m}{n} = 0$$

が成り立つので、(13) から  $S_1 = 2n$  が得られます。

茂木貴宏さん(早稲田大学)も複素数平面を利用していましたが、複素数  $z$  に対して  $|z|^2 = z\bar{z}$  ( $\bar{z}$  は  $z$  の共役複素数)であることを用い、また、  $z = e^{\frac{2\pi m}{n}i} (m = 0, 1, \dots, n-1)$  が  $z^n - 1 = 0$  の  $n$  個の解であることから、  $n$  次方程式の解と係数の関係を考え、  $\sum_{m=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi m}{n}i} = 0$  としていました。

### 三平方の定理の利用

最後に、 $n$  が偶数の場合について、三平方の定理だけで  $S = n^2$  を証明する方法を述べます。これは、小森一矢さん(致遠館高等学校)による証明の「 $n$  が偶数」の場合の証明で使われている方法で、概略は以下のとおりです。

$1 \leq j \leq \frac{n}{2}$  に対して,  $P_{n+j}$  は  $P_j$  を表すことにします. このとき,  $1 \leq j < k < j + \frac{n}{2} \leq n + \frac{n}{2}$  をみたす整数  $j, k$  に対して,  $\triangle P_j P_k P_{j+\frac{n}{2}}$  (図 4) は  $\angle P_j P_k P_{j+\frac{n}{2}} = 90^\circ$  の直角三角形だから,  $P_j P_k^2 + P_k P_{j+\frac{n}{2}}^2 = P_j P_{j+\frac{n}{2}}^2 = 2^2$  が成り立ちます. すなわち,  $P_j P_k^2$  と  $P_k P_{j+\frac{n}{2}}^2$  の和を  $P_j P_{j+\frac{n}{2}}^2 = 2^2$  で置き換えることができます.

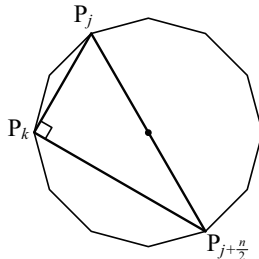


図 4.

小森さんは, この事実に基づいて, 全部で  $\frac{n(n-1)}{2}$  本ある辺と対角線を, 直径である  $\frac{n}{2}$  本とそれ以外に分け, 後者の適当な 2 本ずつを 1 組にする (補注 2) という考え方により,

$$S = \frac{n}{2} \times 2^2 + \frac{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{2}}{2} \times 2^2 = 2n + n(n-1) - n = n^2$$

を導いていました ( $n$  が奇数の場合には, 余弦定理と (5) を用いていました).

#### 補注

1. 三角関数の積, 例えば, 余弦  $\cos \alpha$  と正弦  $\sin \beta$  の積  $\cos \alpha \sin \beta$  は,

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

という差の形で表すことができます. これは, 正弦の加法定理  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  から  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$  を辺々引いて 2 で割ることで得られます. 同様にして,  $\sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta$  を三角関数の和や差の形で表すことができます.

2. 直径以外の  $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{2}$  本の辺と対角線の全体を, それらの長さに応じて

$$\begin{aligned} D_1 &= \{P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_n P_{n+1}\}, \\ D_2 &= \{P_1 P_3, P_2 P_4, \dots, P_n P_{n+2}\}, \\ &\dots \\ D_{\frac{n}{2}-1} &= \{P_1 P_{\frac{n}{2}}, P_2 P_{\frac{n}{2}+1}, \dots, P_n P_{\frac{3n}{2}-1}\} \end{aligned}$$

と分類します.  $D_k$  と  $D_{\frac{n}{2}-k}$  のどの線分どうしを組にしても ( $n$  が 4 の倍数の場合には,  $D_{\frac{n}{4}}$  の異なる 2 本ずつの組も考えます), それらの平方の和は  $2^2$  になりますから, 「どの  $D_j$  も同数個の線分を含んでいる」ことと 「( $n$  が 4 の倍数のとき)  $D_{\frac{n}{4}}$  が偶数個の線分を含んでいる」ことに注意を払えばよいことになります.

なお, 辺と対角線を, 直角をはさむ 2 本ずつの組に分けることも可能です. 例えば,  $P_j P_{j+k} \in D_k$  と  $P_{j+k} P_{j+\frac{n}{2}} \in D_{\frac{n}{2}-k}$  ( $j, k$  は  $1 \leq j \leq n, 1 \leq k < \frac{n}{4}$  をみたす整数) を組にして,  $n$  が 4 の倍数の場合にはさらに,  $D_{\frac{n}{4}}$  の  $P_j P_{j+\frac{n}{4}}$  と  $P_{j+\frac{n}{4}} P_{j+\frac{n}{2}}$  ( $1 \leq j \leq \frac{n}{4}, \frac{n}{2} + 1 \leq j \leq \frac{3n}{4}$ ) を組にする, という分け方が考えられます.

**問題 2.** すべての面が正多角形である凸多面体(くぼみのない多面体)を正則多面体と呼ぶ. 正則多面体には, 正多面体(面はすべて同じ正多角形で, どの頂点にも同じ個数の面が集まっている. 全部で5種類ある), アルキメデス多面体(面に使われている正多角形が2種類以上で, どの頂点でも面が同様の集まり方をしているもののうち, 13種類のもの), アルキメデス角柱(側面が正方形である正多角柱), アルキメデス反角柱(正多角柱を, その各側面が2個の正三角形になるように”ねじった”形の多面体), そして, ジョンソン・ザルガラー多面体(上述したもの以外のすべて)がある. ジョンソン・ザルガラー多面体は92種類あり, それぞれに番号がつけられていて,  $J_1$  から  $J_{92}$  で表される(ウェブ・サイト “Wolfram MathWorld” の Johnson Solid の項 (<http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html>) 参照).

また, 多面体の展開図とは, その多面体を辺に沿って切り開いて平面状になった連結な図形のこととする. このとき, 「ある多面体が性質 “TP” を持つ」とは, その多面体の展開図のうち, 少なくとも1つがタイル張りできる, すなわち, その展開図のコピーを無数に使って, 平面をすき間も重なりもなく埋め尽くせることをいう. 例えば, 正多面体では, 正十二面体以外のどの多面体も性質 “TP” を持っている. また, 13種類のアルキメデス多面体には性質 “TP” を持つものはひとつもなく, アルキメデス反角柱では正六角反角柱だけが性質 “TP” をもつ(図1). また, ジョンソン・ザルガラー多面体では, 例えば,  $J_1$  (正四角錐) などが性質 “TP” を持っている(図2).

ジョンソン・ザルガラー多面体  $J_1$  から  $J_{92}$  のうち,  $J_1$  以外で, 性質 “TP” を持つ多面体をなるべく多く示せ. また, それらの各多面体について, ある展開図がタイル張りする様子も図2にならって図示せよ. ただし, 図2は, 性質 “TP” を持つ多面体  $J_1$  について, ある展開図がタイル張りする様子を表しており, 同じ記号がつけられた辺は, もとの  $J_1$  において一致する辺を表している.

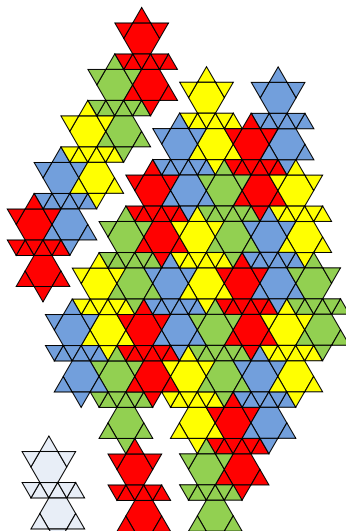


図 1.

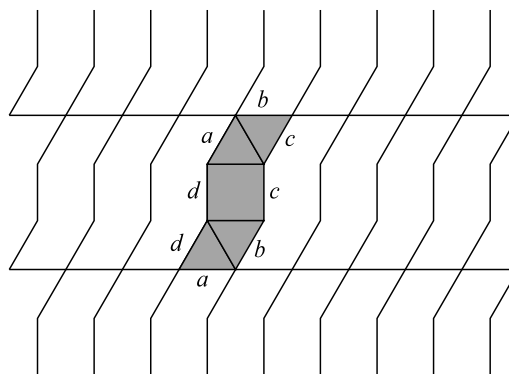


図 2.

超難問だったせいか, 解答を寄せてくれたのは, 新井陽さん(筑波大学附属駒場高等学校)と武田久輝さん(京都大学)の二人だけでした. どちらも  $J_{12} \sim J_{17}$  の6つのジョンソン・ザルガラー多面体(以下, JZ-多面体と記します)が性質 “TP” を持つことを示してくれており, それらはいずれも正解でした. なお, 後述するように, 性質 “TP” を持つ JZ-多面体は全部で18個あります.

一着正解賞 (敬称略)

新井陽 (筑波大学附属駒場高等学校)

最優秀者 (敬称略, 五十音順)

新井陽 (筑波大学附属駒場高等学校)

武田久輝 (京都大学)

## 解説

JZ-多面体  $P$  が充填的であるとは,  $P$  を辺に沿って開いた展開図のうちの少なくともひとつが平面充填形である (つまり, 性質 “TP” を持つ) ことです.

本研究の目的は 92 個の JZ-多面体について, 充填的か否かを決定することです. この問題は易しそうで実は奥の深いもので, コンピュータを駆使しない限り全面解決には至らないようです. まず, 数学的に, 以下に示す 2 つの命題 (必要条件) で解の候補を 35 個に絞り込み, それらの各多面体について, ひたすら充填的展開図を探します. 充填的展開図が探せなかったものについては, コンピュータで非充填性をチェックします. この結果, 充填的な JZ-多面体は全部で 18 個あり, また, それらに限ることが判明しました. 以下, より詳細に述べます.

まず, 次の初等的な結果が成り立ちます.

**命題 1.**  $P$  を充填的な JZ-多面体とする. すると,  $P$  の各面は正 3 角形, 正方形, 正 6 角形のいずれかである.

**命題 2.**  $P$  が面としてもつ正多角形の中で, 辺数が最小のものが正  $k$  角形であるとする. また,  $v$  を  $P$  の頂点とするとき,  $v$  に集まる面の角の和を  $S(v)$  とする. このとき,  $P$  のどの頂点  $v$  に対しても, 不等式

$$2\pi - S(v) < \frac{k-2}{k}\pi$$

が成立するならば,  $P$  は充填的でない.

**証明.**  $P$  の各頂点  $v$  に対して,  $2\pi - S(v) < \frac{k-2}{k}\pi$  が成り立つと仮定する.  $P$  は凸なので, 各頂点  $v$  に対し,  $0 < 2\pi - S(v)$  が成り立つ. 即ち,

$$0 < 2\pi - S(v) < \frac{k-2}{k}\pi (= \text{正 } k \text{ 角形の } 1 \text{ つの内角の大きさ}) \quad (1)$$

$N$  を  $P$  の充填的な展開図とする.  $P$  の各点  $v$  に対し, 不等式 (1) が成り立つので,  $P$  の各点には 2 本以上の切開される辺 (切断辺) が隣接していなければならない. よって,  $P$  は切断辺から成る閉路を含むことになり, 展開図  $N$  は連結図形にならない. これは矛盾. よって,  $P$  は充填的でない.  $\square$

上記 2 つの命題より, 以下の 57 個の JZ-多面体は充填的でないことが分かります.

$$J_2, J_4 \sim J_6, J_9, J_{11}, J_{19} \sim J_{21}, J_{23} \sim J_{25}, J_{30} \sim J_{34}, J_{37} \sim J_{43},$$

$$J_{45} \sim J_{48}, J_{52}, J_{53}, J_{58} \sim J_{64}, J_{66} \sim J_{83}, J_{91}, J_{92}$$

しかし, まだ残りの 35 個の JZ-多面体が充填的である可能性があります. それらを列記すると以下ようになります:

$$J_1, J_3, J_7, J_8, J_{10}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}, J_{16}, J_{17}, J_{18}, J_{22}, J_{26},$$

$$J_{27}, J_{28}, J_{29}, J_{35}, J_{36}, J_{44}, J_{49}, J_{50}, J_{51}, J_{54}, J_{55}, J_{56}, J_{57},$$

$$J_{65}, J_{84}, J_{85}, J_{86}, J_{87}, J_{88}, J_{89}, J_{90} \quad (\text{計 } 35 \text{ 個})$$

このうち, 18 個の JZ-多面体

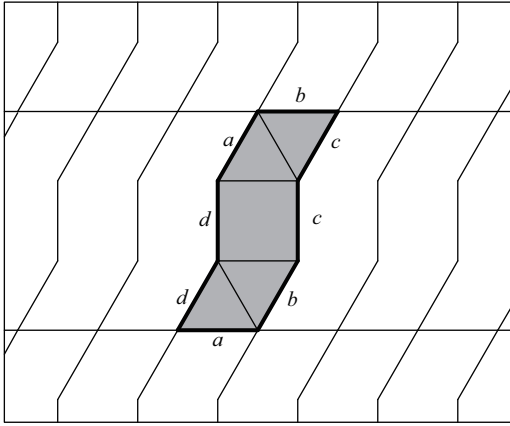
$$J_1, J_8, J_{10}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}, J_{16}, J_{17}, J_{49}, J_{50}, J_{51}, J_{84}, J_{86}, J_{87}, J_{88}, J_{89}, J_{90} \quad (2)$$

はそれぞれ充填的な展開図 (次ページ以降の図参照) をもちますから, 残りの 17 個の各々についてコンピュータで網羅的にチェックします.

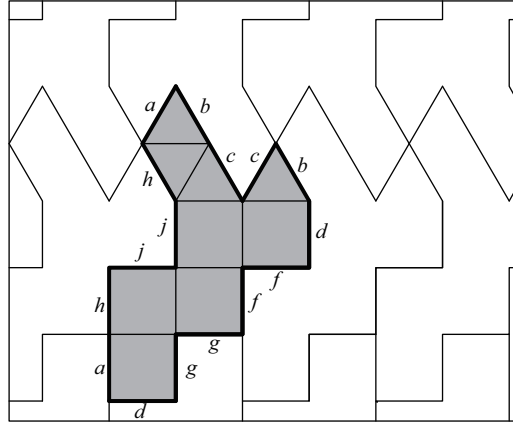
その結果, これらのいずれも充填的でないことが分かりました. よって, 充填的な JZ-多面体は (2) に示される 18 個が全てです. また, その各々の充填を次ページ以降に示します.

新井さんはとても鋭い直感を働かせていました. それは正則多面体が正 5, 6, 8, 10 角形の面を含むと充填は困難そうであることに直感的に気付いていたことです. この直感はほぼ正しい (命題 1) のですが, 少し不正確な箇所があります. というのは, 正 6 角反柱 (これは JZ-多面体ではないが) は正 6 角形の面を含みますが充填的だからです (問題文の図 1 参照).

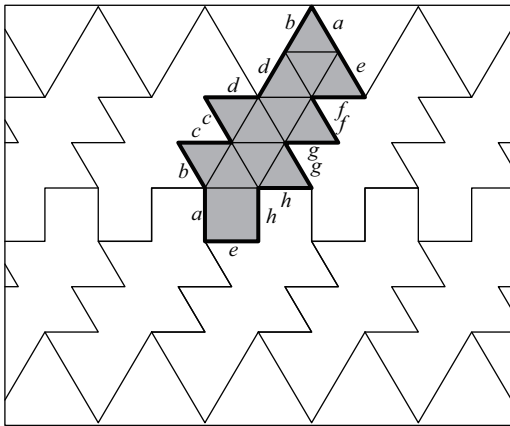
また, 彼の 2 つ目のコメントに, 多面体の頂点に正方形 3 つと正 3 角形ひとつが集まると充填は困難とありましたが, この考えを一般化すると命題 2 が得られます.



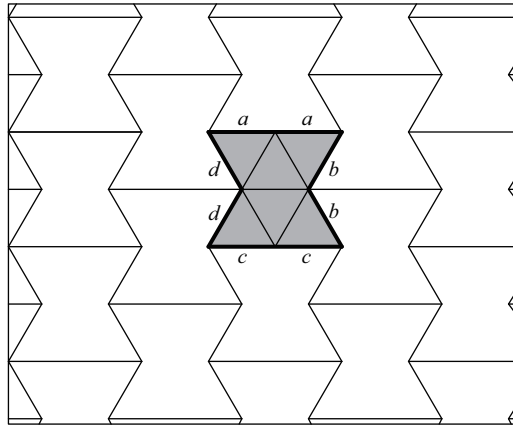
$J_1$



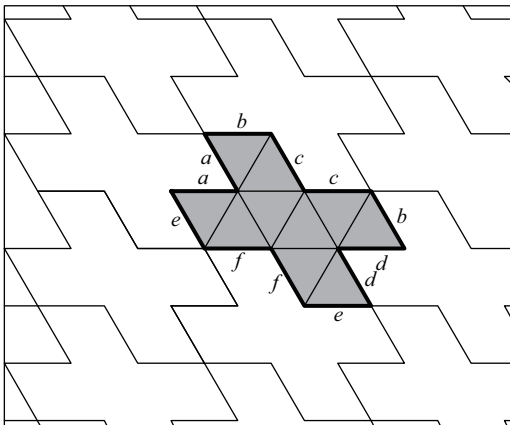
$J_8$



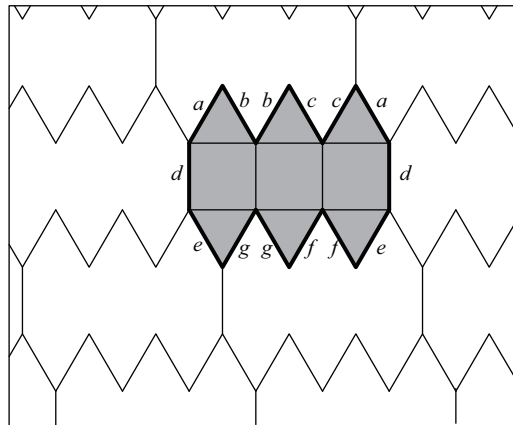
$J_{10}$



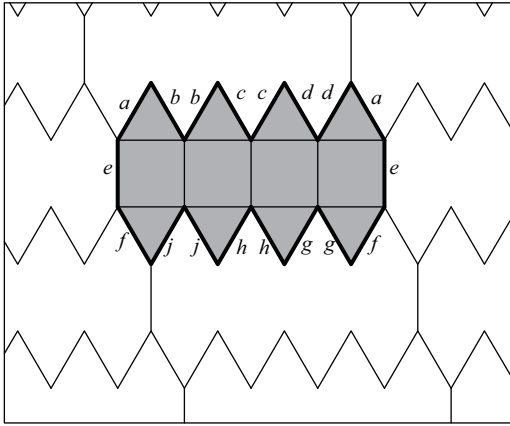
$J_{12}$



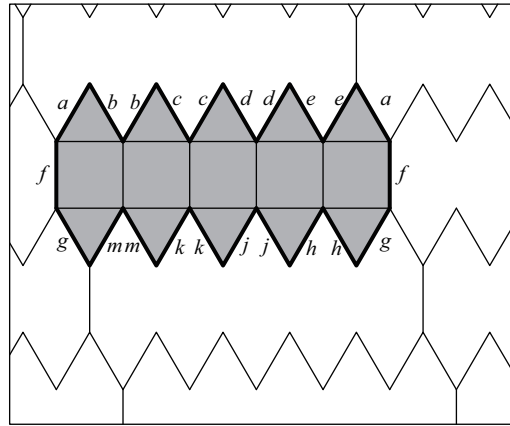
$J_{13}$



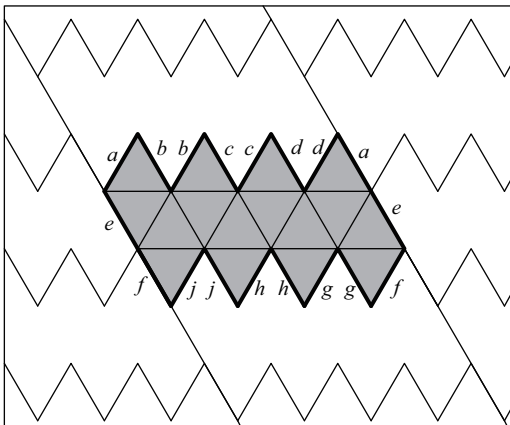
$J_{14}$



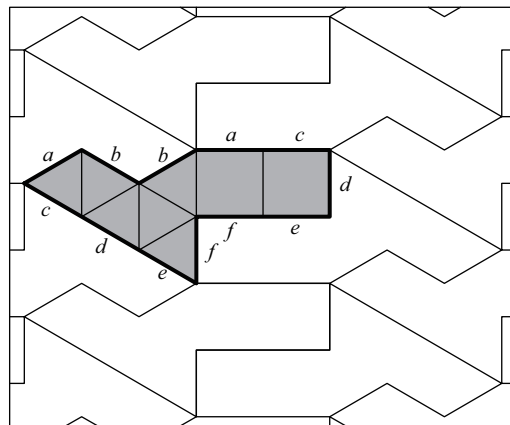
$J_{15}$



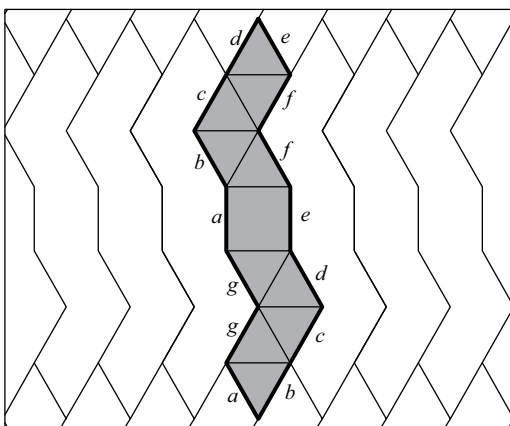
$J_{16}$



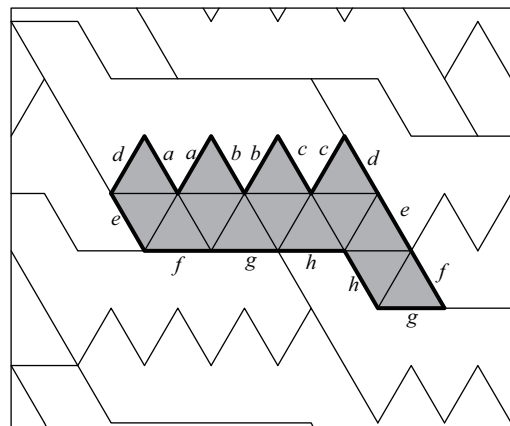
$J_{17}$



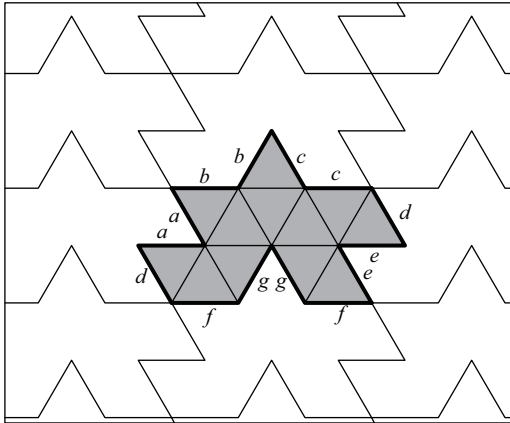
$J_{49}$



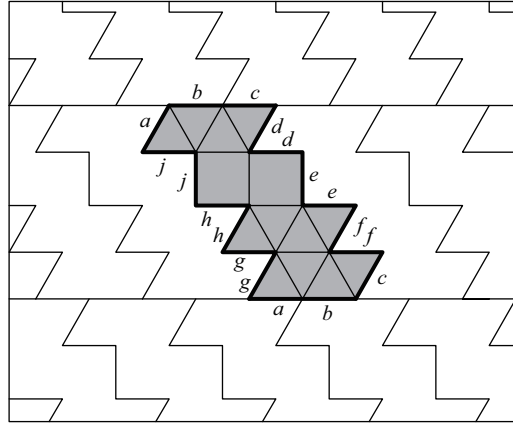
$J_{50}$



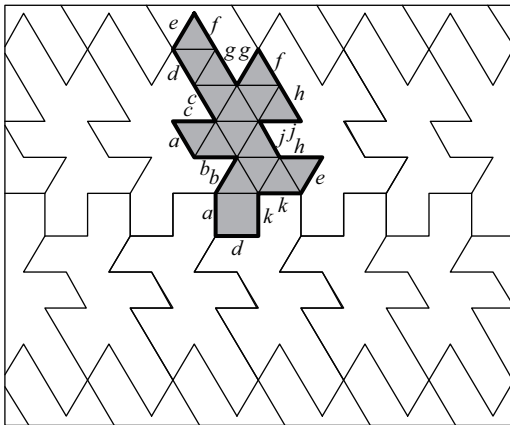
$J_{51}$



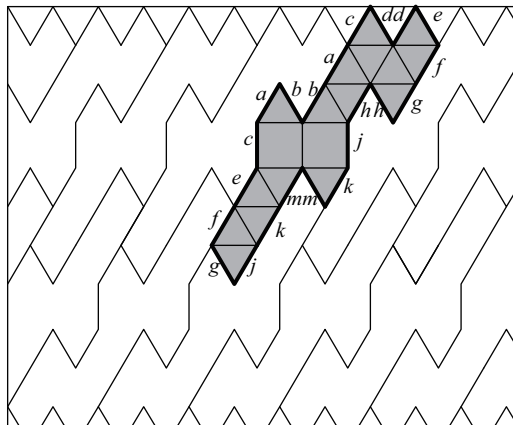
$J_{84}$



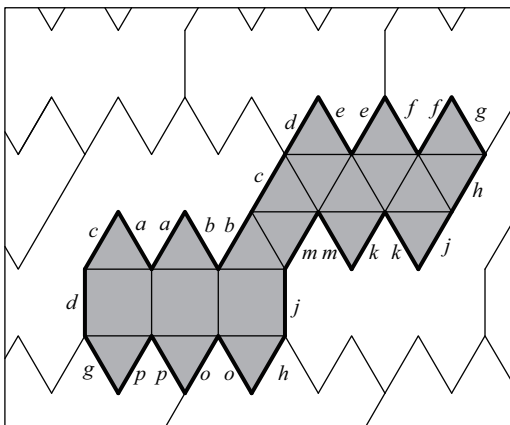
$J_{86}$



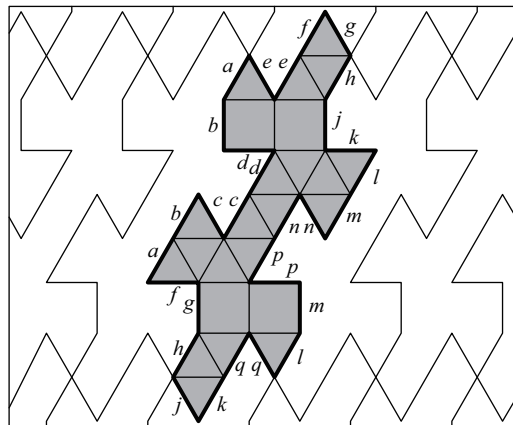
$J_{87}$



$J_{88}$



$J_{89}$



$J_{90}$